Université de Gabès
Faculté des Sciences de Gabès
Département Mathématique

A.U: 2019-2020

SECTION: LFM2 TD N°3: ALGÈBRE 4.

Exercice 1

1. Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si,
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$
2. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant
$$\forall x, y \in E, x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant
$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

Correction Exercice .1.

($\Rightarrow$) Via Pythagore
($\Leftarrow$) Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geqslant 0$.
Si, par l'absurde $(x \mid y) \neq 0$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda(x \mid y)$ qui change de signe en 0. Absurde.
Par suite $(x \mid y) = 0$.

Soient x, y deux vecteurs unitaires de E.
Puisque
$$(x + y \mid x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$
les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux et donc $f(x + y)$ et $f(x - y)$ le sont aussi.
On a donc
$$\|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 = (f(x) + f(y) \mid f(x) - f(y)) = (f(x + y) \mid f(x - y)) = 0$$
On en déduit que les images par f des vecteurs unitaires de E ont tous la même norme. En posant λ cette valeur commune, on a
$$\forall u \in E, \|u\| = 1 \Rightarrow \|f(u)\| = \lambda$$
Pour $x \in E$ non nul, le vecteur $u = x/\|x\|$ est unitaire et donc
$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \lambda$$
d'où l'on tire
$$\|f(x)\| = \lambda \|x\|$$
relation qui reste valable quand $x = 0$.

Exercice 2

On munit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire:

$$(f|g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
2. Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
3. Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Correction Exercice .2.

a) Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent
$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque
$(P_0 \mid P_2) = 1/3 \neq 0$.
b) $R_0 = P_0$, $\|R_0\| = 1$, $Q_0 : x \mapsto 1$
$(P_0 \mid P_1) = 0$, $R_1 = P_1$, $\|R_1\| = 1/\sqrt{3}$, $Q_1 : x \mapsto \sqrt{3}x$.
$R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1$.
$(R_2 \mid R_0) = 0$ donne $\lambda_0 = -(P_2 \mid P_0) = -1/3$,
$(R_2 \mid R_1) = 0$ donne $\lambda_1/3 = -(P_2 \mid R_1) = 0$.
$R_2 : x \mapsto x^2 - 1/3$, $\|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $Q_2 : x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2}\left(3x^2 - 1\right)$.
c) Le projeté orthogonal de P_3 sur F est

$$R = (Q_0 \mid P_3)Q_0 + (Q_1 \mid P_3)Q_1 + (Q_2 \mid P_3)Q_2$$

soit, après calculs

$$R : x \mapsto \frac{3}{5}x$$

La distance de P_3 à F est alors

$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}$$

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{P}$ et $\mathbb{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.
   Montrer que $\mathbb{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
3. Soit $\psi \colon f \mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$.
   Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Correction Exercice .3.

a) Rien à signaler.
b) On a

$$\forall f \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in \mathcal{I},\ \varphi(f,g) = 0$$

car le produit $t \mapsto f(t)g(t)$ est impair et intégré sur un intervalle symétrique par rapport à 0.
Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$.
Inversement, soit $h \in \mathcal{I}^\perp$. On sait $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$ donc on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$.
On a $\varphi(h,g) = \varphi(f,g) + \varphi(g,g)$. Or $\varphi(h,g) = 0$ et $\varphi(f,g) = 0$ donc $\varphi(g,g) = 0$ d'où $g = 0$.
Ainsi $h = f \in \mathcal{P}$ puis $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{P}$. On conclut.
c) $\psi^2 = \mathrm{Id}$ donc ψ est une symétrie.

$$\forall f \in \mathcal{P}, \psi(f) = f \text{ et } \forall f \in \mathcal{I} = (\mathcal{P})^\perp, \psi(f) = -f$$

donc ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 4

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0 \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Correction Exercice .4.

a) Soient $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et
$K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$
On a $F = H \cap K$ puis $F^\perp = H^\perp + K^\perp$.
Soient $n = (1,1,1,1)$ et $m = (1,-1,1,-1)$ des vecteurs normaux à H et K.
Par Schmidt

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

forment une base orthonormée de $F^\perp$.
b) On peut facilement former $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(p_{F^\perp})$ car

$$\forall x \in E, p_{F^\perp}(x) = (x \mid e_1)e_1 + (x \mid e_2)e_2$$

donc

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(p_F) = I_4 - \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Pour $u = (1,2,3,4), p_F(u) = (-1,-1,1,1)$ donc

$$d(u,F) = \|u - p_F(u)\| = \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26}$$

Exercice 5

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
On note

$$G(x_1,\dots,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que si $(x_1,...,x_n)$ est liée alors

$$\det G(x_1,\dots,x_n) = 0$$

2. On suppose désormais que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre et on pose

$$F = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$$

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F.
Exprimer $G(x_1,\dots,x_n)$ en fonction de M et de $\mathrm{tr}(M)$. En déduire que

$$\det G(x_1,\dots,x_n) > 0$$

3. On introduit de plus $x \in E$. Montrer que

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(x,x_1,\dots,x_n)}{\det G(x_1,\dots,x_n)}}$$

Correction Exercice .5.

a) Si $(x_1,\dots,x_n)$ est liée alors les colonnes de $G(x_1,\dots,x_n)$ le sont selon la même relation.
b) $(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ avec $M = (a_{i,j})$ donc $G(x_1,\dots,x_n) = {}^t MM$.
Par suite $\det(G(x_1,x_2,\dots,x_n)) = \det(M)^2 > 0$ car M inversible puisque $(x_1,\dots,x_n)$ libre.
c) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. On a $d(x,F) = \|n\|$.

En exprimant la première colonne du déterminant comme somme de deux colonnes :

$$\det G(u+n,x_1,\dots,x_n) = \det G(u,x_1,\dots,x_n) + \begin{vmatrix} \|n\|^2 & \star \\ 0 & G(x_1,\dots,x_n) \end{vmatrix}$$

or $\det G(u,x_1,\dots,x_n) = 0$ car la famille est liée et

$$\begin{vmatrix} \|n\|^2 & \star \\ 0 & G(x_1,\dots,x_n) \end{vmatrix} = \|n\|^2 \det G(x_1,\dots,x_n)$$

On en déduit

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(x,x_1,\dots,x_n)}{\det G(x_1,\dots,x_n)}}$$

Exercice 6

Soient a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E, α un réel et $f_\alpha \colon E \to E$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x|a).a$$

1. Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.
2. Calculer $f_\alpha^p = \underbrace{f_\alpha \circ \cdots \circ f_\alpha}_{p \text{ fois}}$ pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1}?
4. Montrer
$$f_\alpha \in O(E) \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2$$
Quelle est la nature de f_{-2}?

Correction Exercice .6.

a) On a
$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = f_\beta \circ f_\alpha$$
b) Par récurrence
$$f_\alpha^p = f_{(\alpha+1)^p-1}$$
c) Si $\alpha = -1$ alors $f_\alpha(a) = 0$.
f_{-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Si $\alpha \neq -1$ alors $g = f_{-\alpha/(\alpha+1)}$ satisfait à la propriété $f_\alpha \circ g = g \circ f_\alpha = \mathrm{Id}$ donc f_α inversible.
d) Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = \mathrm{Id}$.
Si $\alpha = -2$ alors f_α est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Dans les deux cas $f_\alpha \in \mathcal{O}(E)$.
Si $\alpha \neq 0, -2$ alors $f_\alpha(a) = (1+\alpha).a$ puis
$$\|f_\alpha(a)\| = |1+\alpha| \neq 1 = \|a\|$$
et donc $f_\alpha \notin \mathcal{O}(E)$.

Exercice 7

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer
$$M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}.$$
2. Montrer
$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1.$$
3. Montrer que M est dans $SO_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Correction Exercice .7.

a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$$

Puisque $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1$$

b) On suppose la matrice M orthogonale et l'on calcule sont déterminant. En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis en retranchant les premières lignes aux suivantes

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

Enfin

$$\det M = (a+b+c)\left((a-b)(a-c)+(b-c)^2\right)$$

Ainsi

$$\det M = S\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = S$$

car $a^2+b^2+c^2=1$ et $\sigma=0$.

Finalement

$$M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

c) Les nombres a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si,

$$X^3 - X^2 + k = (X-a)(X-b)(X-c)$$

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à la satisfaction du système

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \\ abc=-k \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0, 4/27]$. En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 + k$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x(3x-2)$.

Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geqslant 0$ et $f(2/3) \leqslant 0$.

Cela fournit les conditions $k \geqslant 0$ et $k \leqslant 4/27$.

Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)

Ainsi, si $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.

Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.