Table des matières

Probabilités discrètes

0.1 Calcul des probabilités sur un ensemble au plus dénombrable

0.1.1 Ensembles dénombrables

Définition 1 (Ensemble dénombrable)**.**

Soit E un ensemble. On dit que E est :

1. *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[1, n]$.
2. *dénombrable* si E est en bijection avec $\mathbb{N}$.
3. *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Exemples 0.1.1.

1. *$\mathbb{N}$ est dénombrable ($I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une bijection).*
2. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*
3. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*
4. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Remarque 0.1.1.

1. *Le produit cartésien d'ensembles dénombrables est aussi dénombrable.*
2. *La réunion disjointe de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

0.1.2 Expérience aléatoire et univers

Définition 2 (Experience aléatoire)**.**

On appelle experience aléatoire toute experience dont le résultat deponed du hazard (c'est à dire une experience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec une certitude forte). On note par ξ une experience.

Exemples 0.1.2. *1. Soit un dé régulier dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 6.

$$\xi : \text{"Lancée d'un dé."}$$

Le résultat de cette experience est le numéro qui apparaît sur la face supérieure du dé. $"w = 1"$ *c'est obtenir* 1 *après cette experience. C'est un résultat possible et il n'est pas certain.*

2. Soit une piece de monnaie. On considère l'experience aléatoire suivante :

$$\xi : \text{"Jet d'une pièce de monnaie."}$$

Le résultat de cette experience est d'obtenir pile ou bien face, c'est à dire $"w = P"$ *ou bien* $"w = F"$.

Définition 3 (Univers)**.**

Soit ξ une experience aléatoire. On appelle univers de ξ (ou aussi univers associé a ξ) l'ensemble des résultats possibles de ξ. On le note par Ω.

Exemples 0.1.3. *1. Soit un dé régulier dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 6*. On considère l'experience aléatoire* ξ *: "Lancée d'un dé". L'univers associé est*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. On considère l'experience aléatoire ξ *: "Jet de deux pieces de monnaie". L'univers associé est*

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

3. Soit une urne contenant 4 *boules de couleurs : noire, rouge, bleue et jaune. On considère l'experience aléatoire* ξ *: "tirage d'une boule". L'univers associé est*

$$\Omega = \{noire, rouge, bleue, jaune\}.$$

Définition 4 (Résultat élémentaire)**.**

On appelle résultat élémentaire d'une experience aléatoire ξ, un résultat possible de ξ. C'est un élément de Ω. On le note souvent par w.

Exemples 0.1.4.

Définition 5 (L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$)**.**

Soit Ω l'univers d'une experience aléatoire ξ. On note par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties (ou aussi sous ensembles) de Ω.

Exemples 0.1.5. *On considère l'univers* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$*. L' ensemble* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est donné par*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) &= \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \\ &\quad \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\Big\}.\end{aligned}$$

0.1.3 Les événements

Définition 6 (Événement)**.**

On appelle événement, une assertion qui peut ou non se réaliser suivant l'issue d'une experience ξ. C'est une partie de Ω.

Exemples 0.1.6.

1. *On considère l'expérience* ξ *: "Lancée d'un dé". Soit l'événement*

   $$A : \text{"Obtenir un nombre pair"}.$$

   Il est immédiat de voir que $A = \{2, 4, 6\}$*.*

2. *On considère l'expérience* ξ *: "Jet de deux pièces de monnaie". Soit l'événement*

   $$A : \text{"Obtenir pile ou face"}.$$

   Alors, $A = \{(P, F), (F, P), (P, P), (F, F)\} = \Omega$*.*

Définition 7 (Réalisation d'un événement)**.**

Soit A un événement de Ω. Soit w le résultat d'une experience aléatoire ξ. On dit que A se réalise si $w \in A$.

Remarque 0.1.2.

1. *Un événement* A *est dit élémentaire si* $A = \{w\}$*.*
2. *Un événement* A *est dit certain s'il se réalise toujours, c'est à dire* $A = \Omega$*.*
3. *Un événement* A *est dit impossible s'il ne se réalise jamais, c'est à dire* $A = \emptyset$*.*

Exemple 0.1.1. *On considère l'expérience aléatoire* ξ *: "Lancée de deusx piéces de monnaies". Soit l'événement* A *: "Obtenir deux faces". L'événement* A *ne se réalise pas si* $w = (F, P)$*,* (P, F)*, ou* (P, P)*.*

▶ Terminologie des événements aléatoires

Soit ξ une expérience aléatoire, Ω l'univers associé et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. **L'événement contraire** : $\overline{A}$ est l'événement qui se réalise si A ne se réalise pas, et réciproquement. L'événement $\overline{A}$ est représenté par
$$\overline{A} = \{w \in \Omega : w \notin A\} = \Omega \backslash A.$$

2. **Intersection de deux événements** : $A \cap B$ est l'événement qui se réalise si A et B se réalisent. L'intersection de A et B est représentée par
$$A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ } et \text{ } w \in B\}.$$
A et B sont dits incompatibles (ou mutuellement exclusifs) s'ils n'ont pas d'éléments commun, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$.

   Remarque 0.1.3.

   (a) *$A \cap \overline{A} = \emptyset$: événement impossible.*

   (b) *Si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements, alors*
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$
   est l'ensemble des w qui sont dans tous les A_i, $1 \leq i \leq n$. On peut étendre cette définition aux intersections d'une suite infinie d'événements
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{\textit{réalisation de tous les } A_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

   Exemple 0.1.2. *Dans une urne, on place 10 cartons portant chacun un numéro de 1, à 10. On extrait un carton de l'urne. On considère les événements suivants :*

   (a) *A : "le carton extrait porte un numéro divisible par 3".* $(A = \{3, 6, 9\})$.

   (b) *B : "le carton extrait porte un numéro inférieur ou égal à 6".* $(B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$.

   $A \cap B$: "le carton extrait porte un numéro divisible par 3 et inférieur à 6". $(A \cap B = \{3, 6\})$.

3. **Réunion de deux événements** : $A \cup B$ est l'événement qui se réalise si A se réalise ou B se réalise. La réunion de A et B est représentée par
$$A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ } ou \text{ } w \in B\}.$$

   Remarque 0.1.4.

   (a) *$A \cup \overline{A} = \Omega$: événement certain.*

   (b) *Si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements, alors*
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

est l'ensemble des w qui sont dans l'un au moins des A_i, $1 \leq i \leq n$. On peut étendre cette définition aux réunions d'une suite infinie d'événements

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{\textit{réalisation de l'un au moins des } A_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

4. **Inclusion** : $A \subset B$ (ou aussi A implique B) si A est réalisé, alors B est réalisé,

$$A \subset B \Longleftrightarrow \big(w \in A \Longrightarrow w \in B\big).$$

5. **Système complet d'événements** :
   (a) Une famille fine $(A_1, \cdots, A_n)$ d'événements est dite un système complet d'événements s'ils forment une partition de Ω, c'est à dire
      (i) ils sont deux à deux incompatibles $\forall\, i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.
      (ii) leur réunion est l'événement certain Ω : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
   (b) Une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements est dite un système complet d'événements s'ils forment une partition de Ω, c'est à dire
      (i) ils sont deux à deux incompatibles $\forall\, i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.
      (ii) leur réunion est l'événement certain Ω : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$.

Remarque 0.1.5. *Soit A un événement. Comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, alors $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements de Ω.*

▶ Opérations élémentaires sur les événements

(a) Associativité :

$$\begin{cases} A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3, \\ A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3. \end{cases}$$

(b) Commutativité :

$$\begin{cases} A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1, \\ A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1. \end{cases}$$

(c) Distributivité :

$$\begin{cases} A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3), \\ A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3). \end{cases}$$

(d) Lois de Morgan :

$$\begin{cases} \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}, \\ \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}. \end{cases}$$

0.1.4 Probabilités sur un univers fini

Définition 8 (Tribu).

Soit Ω un ensemble. On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$.
2. Stabilité par passage au complémentaire : $\forall\, A \in \mathcal{T}$, $\overline{A} \in \mathcal{T}$.
3. Stabilité par union dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est dit un espace probabilisable.

Exemple 0.1.3.

1. *$\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, dite tribu grossière.*
2. *$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.*

Définition 9 (Probabilité).

Soit Ω un univers associé à une experience aléatoire ξ. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$, une application

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A), \end{array}$$

vérifiant :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall\, A \in \mathcal{T}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a :

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Remarque 0.1.6.

1. *Une probabilité est une fonction permettant de mesurer la chance de réalisation d'un événement.*
2. *Soit $\Omega = \{w_1, \cdots, w_n\}$ l'ensemble des résultats possibles (Ω est fini ou dénombrable). Si on désigne par p_i la probabilité de chaque résultat élémentaire w_i, alors on définit la suite $(p_1, \cdots, p_n)$ de nombres tels que $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. La probabilité d'un événement A est $P(A) = \sum\limits_{w_i\in A} p_i$.*

Exemple 0.1.4. 1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} P : P(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}, \end{array}$$

est la probabilité uniforme. Si $\Omega = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $w_i = \{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$, *alors* $P(w_i) = \frac{1}{n}$.

2. *On lance un dé et considère* $\Omega = [1,6]$. $\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$. *P est une probabilité et elle modéliste la lancé d'un dé équilibré.*

Définition 10 (Espace probabilisé)**.**

On appelle espace probabilisé, le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tel que :

(i) $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable,

(ii) P une probabilité sur $\mathcal{T}$.

Proposition 1 (Propriétés générales)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini. Alors, on a :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $\forall\, A \in \mathcal{F}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $\forall\, A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ et $P(B|A) = P(B) - P(A)$.
4. $\forall\, A, B \in \mathcal{F}$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

En particulier, si $A_1, \cdots, A_n$ sont disjoints, alors

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements de $\mathcal{F}$ qui ne sont pas nécessairement deux à deux disjoints, alors

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Preuve.

1. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \cup \emptyset = \Omega, \\ \Omega \cap \emptyset = \emptyset, \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \quad P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset).$$

2. Comme $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements de Ω, alors
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$
3. On a :
$$\begin{aligned} P(B) &= P\big((B|A) \cup A\big) \\ &= P(B|A) + P(A). \end{aligned}$$
4. Si A et B ne sont pas disjoints, alors on peut toujours écrire
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\Big(A \cup \big(B|(A \cap B)\big)\Big) \\ &= P(A) + P\big(B|(A \cap B)\big) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$
5. Par un raisonnement par récurrence, on peut démontrer l'assertion.

■

Exemple 0.1.5. *On tire simultanément* 3 *boules dans une urne contenant 4 boules blanches et 9 boules noires. Déterminer la probabilité de l'événement*

$$A : \text{"Le tirage comporte au moins une boule noire"}.$$

On raisonne par complément. On considère l'événement suivant :

$$\overline{A} : \text{"Le tirage ne comporte pas de boules noires"}.$$

Alors,
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}}.$$

0.1.5 Conditionnement et indépendance

Dans cette section on s'interesse au conditionnement des événements : la réalisation d'un événement conditionne la réalisation d'un autre.

Définition 11 (Conditionnement)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement de Ω tel que $P(B) > 0$. Pour tout événement A de Ω, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :
$$P_B(A) := P\big(A|B\big) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{0.1.1}$$

Remarque 0.1.7.

1. *La probabilité de A sachant B mesure la proportion de chance d'obtenir la réalisation de A lorsqu'on sait B réalisé.*
2. *Si $P\big(A|B\big) = P\big(A\big)$, alors $\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P\big(B\big)$.*

Exemple 0.1.6. *On lance un dé (équilibré) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :*

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{"Obtenir le nombre 2"} \quad \Longrightarrow \quad A = \{2\}. \\ B & : & \text{"Obtenir un nombre pair"} \quad \Longrightarrow \quad B = \{2,4,6\}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \frac{card(A\cap B)}{\Omega} = \frac{1}{6}, \\ P(B) &= \frac{card(B)}{\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$P(B|B) = 1, \quad P\Big(A|B\Big) = \frac{1}{3}, \quad P\Big(A|\overline{B}\Big) = 0.$$

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini, B un événement de Ω tel que $P(B) > 0$ et P_B l'application

$$\begin{aligned} P_B : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto P_B(A) := P\big(A|B\big). \end{aligned}$$

Alors, P_B est une probabilité sur Ω.

Preuve. B un événement de Ω tel que $P(B) > 0$.

$\hookrightarrow$ On a :

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$\hookrightarrow$ Soient $A, A' \subset \Omega$ tels que $A\cap A' = \emptyset$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} P_B(A\cup A') &= \frac{P\big((A\cup A')\cap B\big)}{P(B)} \\ &= \frac{P\big((A\cap B)\cup(A'\cap B)\big)}{P(B)} \\ &= \frac{P\big(A\cap B\big) + P\big(A'\cap B\big)}{P(B)} \\ &= P_B(A) + P_B(A'). \end{aligned}$$

■

Remarque 0.1.8. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé fini,* B *un événement de* Ω *tel que* $P(B) > 0$*. Une conséquence immédiate de la relation* (0.1.1) *est la formule suivante, dite formule des probabilités composées correspondante à deux événements :*

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B). \tag{0.1.2}$$

La forme généralisée de la relation (0.1.2) est donnée par le résultat suivant :

Proposition 3 (Formule des probabilités composées)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $A_1, \cdots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\big) \neq 0. \tag{0.1.3}$$

Alors, on a :

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\big) = P\big(A_1\big) \cdot P\big(A_2|A_1\big) \cdot P\big(A_3|A_1 \cap A_2\big) \cdots P\big(A_n\big|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\big).$$

Preuve. On effectue une démonstration par récurrence.

↪ La relation (0.1.2) prouve que la propriété est satisfaite pour $n = 1$.

↪ Supposons que la propriété est vraie pour un rang $n - 1$ fixé. Alors, on a :

$$\begin{aligned} & P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\big) = P\big(A_1 \cap \underbrace{A_2 \cap \cdots \cap A_n}_{B}\big) \\ = \quad & P_B(A_1) \cdot P(B) \\ = \quad & P\big(A_1\big|A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\big) \cdot P\big(A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\big) \\ \underbrace{=}_{H.R} \quad & P\big(A_1\big|A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\big) \cdot P\big(A_2\big|A_3 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\big) \cdots P\big(A_{n-1}\big|A_n\big) \cdot P\big(A_n\big). \end{aligned}$$

■

Exemple 0.1.7. *Une urne contient* 4 *boules blanches et* 6 *boules rouges. On tire successivement et sans remises* 3 *boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir un un tirage constitué de* 3 *boules blanches.*
↪ *On considère l'événement suivant :*

$$A_i : \text{"la } i \text{ éme boule tirée est blanche".}$$

On a :

$$P(A_1) = \frac{4}{10}, \quad P\big(A_2|A_1\big) = \frac{3}{9}, \quad P\big(A_3\big|A_1 \cap A_2\big) = \frac{2}{8}.$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

Proposition 4 (Formule des probabilités totales)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements tel que $P(A_i) > 0$. Alors, pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\big(B|A_i\big) \cdot P\big(A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P\big(B \cap A_i\big). \tag{0.1.4}$$

Preuve. Comme $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements, alors on a :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(B \cap A_i\big).$$

Les événements $\big(B \cap A_i\big)$ sont incompatibles, donc

$$P(B) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \big(B \cap A_i\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} P\big(B \cap A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P\big(B|A_i\big) \cdot P\big(A_i\big).$$

■

Exemple 0.1.8. *Une urne contient* 7 *boules jaunes et* 3 *boules noires. On effectue deux tirages successifs et sans remises dans cette urne. On considère les événements suivants :*

$$\begin{aligned} J_i &: \text{"la } i \text{ éme boule tirée est jaune"}, \\ N_i &: \text{"la } i \text{ éme boule tirée est noire"}, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?

$\hookrightarrow$ *On a :*

$$\begin{aligned} P(N_1) &= \frac{3}{10} \quad \Longrightarrow \quad P\big(J_2|N_1\big) = \frac{7}{9}. \\ P(J_1) &= \frac{7}{10} \quad \Longrightarrow \quad P\big(J_2|J_1\big) = \frac{6}{9}. \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(J_2) = P\big(J_2|J_1\big) \cdot P(J_1) + P\big(J_2|N_1\big) \cdot P(N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Définition 12 (événements deux à deux indépendants)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. on dit que A et B sont indépendants pour la probabilité P, et on note $A//B$, si

$$P(A \cap B) \quad = \quad P(A) \cdot P(B). \tag{0.1.5}$$

Remarque 0.1.9.

1. *Si* $A//B$ *et* $P(B) > 0$, *alors* $P\Big(A|B\Big) = P(A)$. *La connaissance de la réalisation de* B *n'apporte rien pour savoir si* A *est réalise ou non.*
2. *Deux événement incompatibles ne sont pas indépendants.*
3. $A//B \implies \begin{cases} A//\overline{B}, \\ \overline{A}//B, \\ \overline{A}//\overline{B}. \end{cases}$

Exemple 0.1.9. *Soit une famille à deux enfants. On considère les événements suivants :*

$$\begin{aligned} A &: \text{"la famille a des enfants de deux sexes"} \quad \Big(=\{(F,G),(G,F)\}\Big), \\ B &: \text{"la famille a au plus une fille"} \quad \Big(=\{(F,G),(G,F),(G,G)\}\Big). \end{aligned}$$

Les deux événements A *et* B *sont ils indépendants ?*

$\hookrightarrow$ *On a :*

$$\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\} \quad \Longrightarrow \quad card(\Omega) = 4.$$

D'autre par, il est facile de voir que

$$P(A) = \frac{2}{4},\ P(B) = \frac{3}{4},\ P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B.)$$

Par conséquent, A *et* B *ne sont pas indépendants.*

$\hookrightarrow$ *Si on considère une famille à trois enfants, alors on vérifie que ces deux événements sont indépendants (en exercice).*

Définition 13 (événements mutuellement indépendants)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $A_1, \cdots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si :

$$\forall\, m \in [1, n],\ \forall\, 1 \leq i_1 < i_1 < \cdots < i_m \leq n, \quad P\Big(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\Big) = \prod_{k=1}^{m} P\big(A_{i_k}\big)$$

Remarque 0.1.10.

1. *Les événements A, B et C sont mutuellement indépendants si :*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(A).$$

2. $\Big($*indépendance deux à deux*$\Big) \neq \Big($*mutuelle indépendance*$\Big)$.

0.1.6 Formule de Bayes

Proposition 5 (Formule Formule de Bayes)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors, on a :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Preuve. La relation estimée se déduit de l'identité suivante

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B).$$

■

Théorème 6 (Formule Formule de Bayes généralisée)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements tel que $P(A_i) > 0$. Alors, pour tout événement B de Ω tel que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Preuve. Pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}.$$

Comme les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une partition de Ω, alors la formule des probabilités totales donne

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i),$$

ce qui permet de conclure. ■

Exemple 0.1.10. *On considère 3 urnes organisées de la manière suivante :*

$$U_1 : \begin{cases} \textit{3 boules rouges,} \\ \textit{1 boule bleue,} \end{cases} \qquad U_2 : \begin{cases} \textit{2 boules rouges,} \\ \textit{3 boules bleues,} \end{cases} \qquad U_3 : \begin{cases} \textit{2 boules rouges,} \\ \textit{4 boules bleues.} \end{cases}$$

On tire au hazard une urne, puis une boule de cette urne. On considère l'événement suivant

$$A : \text{"la boule tirée est bleue."}$$

Quelle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_1 ?
$\hookrightarrow$ *On a :* $P\big(U_i\big) = \frac{1}{3}$, $1 \leq i \leq 3$. *Soit l'événement suivant :*

$$B|A_i : \text{"la boule tirée est bleue sachant qu'elle provient de l'urne } U_i\text{"}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Une application de la formule de Bayes généralisée donne

$$P\big(U_1|B\big) = \frac{P\big(B|U_1\big) \cdot P\big(U_1\big)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} P\big(B|U_i\big) \cdot P\big(U_i\big)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}\right)\frac{1}{3}} = \frac{27}{80}.$$

0.2 Variables aléatoires à une dimension

0.2.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 14.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ toute application X :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto X(w) \end{aligned}$$

telle que

1. $X(\Omega) = \{X(w),\ w \in \Omega\}$ est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$. On peut donc numéroter ses éléments par des indices entiers
$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots\}.$$
2. Pour tout $x_k \in X(\Omega)$, $A_k = \{w \in \Omega,\ X(w) = x_k\}$ fait partie de la famille $\mathcal{T}$ d'événements auxquels on peut attribuer une probabilité par P.

Définition 15.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. $\forall A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$,

$$X^{-1}(A) = \{X \in A\} := \{w \in \Omega : X(w) \in A\} \quad \text{est un événement de } \Omega.$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note :
   $\hookrightarrow \{X = a\} = X^{-1}(\{a\}) = \{w \in \Omega : X(w) = a\}$.
   $\hookrightarrow \{X \leq a\} = X^{-1}(\{]-\infty, a]\}) = \{w \in \Omega : X(w) \leq a\}$.
   $\hookrightarrow \{X \geq a\} = X^{-1}(\{[a, +\infty[\}) = \{w \in \Omega : X(w) \geq a\}$.
   De la même manière, on peut définir les événements précédents avec inégalités strictes.

Remarque 0.2.1. *Soit X une variable aléatoire sur Ω.*

1. $\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \{X \in A \cap B\}$.
2. $\{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}$.
3. $\{X \in \overline{A}\} = \overline{\{X \in A\}}$.

Exemple 0.2.1. *On lance deux dés,* $\Omega = [1, 6] \times [1, 6] \Longrightarrow card(\Omega) = 36$.
On considère les deux variables aléatoires suivantes :
$\hookrightarrow X : (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$ *: variables qui associe à une lancée la somme des numéros obtenus.*
$\hookrightarrow Y : (w_1, w_2) \longmapsto \max(w_1, w_2)$ *: variables qui associe à une lancée le* max *des deux numéros obtenus.*
On a :

$$\{X = 11\} = X^{-1}(\{11\}) = \{w \in \Omega : X(w) = 11\} = \{(5, 6), (6, 5)\}.$$

$$\{X \leq 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), \}.$$

$$\{X > 9\} = \{w \in \Omega : X(w) > 9\} = X^{-1}(]9, +\infty[) = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

0.2.2 Loi de probabilités

Définition 16.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. La loi de la variable aléatoire X est la donnée de $P(X = x)$, pour tous les $x \in X(\Omega)$. On la note $P_X(x) = P(X = x)$.

Théorème 7.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors, a loi P_x

$$\begin{array}{rcl} P_X : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & P_X(A) = P(X \in A), \end{array}$$

définit une probabilité sur $X(\Omega)$.

Preuve. On a :

$\hookrightarrow$ $P_X\big(X(\Omega)\big) = P_X\big(X \in X(\Omega)\big) = P(\Omega) = 1$.

$\hookrightarrow$ Soit $A,\ B \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$ deux événements incompatibles, alors $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont aussi incompatibles. Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} P_X\big(A \cup B\big) & = & P\big(X \in A \cup B\big) \\ & = & P\big(\{X \in A\} \cup \{X \in B\}\big) \\ & = & P\big(\{X \in A\}\big) + P\big(\{X \in B\}\big) \\ & = & P_X(A) + P_X(B). \end{array}$$

■

Exemple 0.2.2. 1. *On lance deux dés* $(\Omega = [1,6] \times [1,6] \Longrightarrow card(\Omega) = 36.)$

On considère la variable aléatoire qui associe à une lancée le max *des deux numéros obtenus*

$$Y : (w_1, w_2) \longmapsto \max(w_1, w_2), \quad \big(Y(\Omega) = [1,6]\big).$$

La loi de Y *est décrite par le tableau suivant :*

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

2. *On lance une piece de monnaie équilibrée* $(\Omega = \{P, F\})$. *On considère la variable aléatoire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (w_1, w_2) & \longmapsto & \begin{cases} 0, & si\ w{=}P\,; \\ 1, & si\ w{=}F. \end{cases} \end{array}$$

La loi de X *est décrite par le tableau suivant :*

x	*0*	*1*
$P_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

0.2.3 Espérance mathématique et Variance

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, avec les probabilités respectives $p_1 = P(X = x_1), \cdots, p_n = P(X = x_n)$. On définit une moyenne arithmétique des différentes valeurs de X pondérées par leurs probabilités p_k, appelée espérance mathématique et notée $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k). \tag{0.2.1}$$

Définition 17 (Espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle espérance mathématique de X, notée $\mathbb{E}(X)$, le nombre défini par

(✓) si X finie

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k).$$

(✓✓) si X est dénombrable

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Remarque 0.2.2. *Si X est une variable aléatoire discrète constante alors son espérance est $\mathbb{E}(X) = c$.*

Propriétés 8.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles d'espérances finies et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. Linéarité : $\mathbb{E}(X + \alpha Y) = \mathbb{E}(X) + \alpha \mathbb{E}(Y)$.
2. Positivité :
   (a) Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
   (b) Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
3. Espérance et valeur absolue : $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.
4. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a : $P_X(A) = P(X \in A) = \mathbb{E}(1_A(X))$.
5. Si $X//Y$, alors on a : $\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

Définition 18 (Moments)**.**

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre n de X, et l'on note $m_n(X)$, la quantité

$$\mathbb{E}(X^n) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^n P(X = x_k). \tag{0.2.2}$$

Remarque 0.2.3. *Soit X une variable aléatoire sur Ω.*

1. *Pour $n = 1$, on a :*

$$m_1(X) = \mathbb{E}(X).$$

2. *Si X possède un moment d'ordre n, alors elle possède aussi des moments de tout ordre $s \leq n$.*
3. *On appelle moment centré d'ordre n de X, la quantité*

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^n\big).$$

Définition 19 (Variance et écart type)**.**

Soit X une variable aléatoire sur Ω ayant un moment d'ordre 2. On appelle :

1. variance de X, la quantité

$$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) \ \ (\geq 0).$$

2. l'écart type de X, la quantité

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Propriétés 9.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
2. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
3. Si $X//Y$, alors $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

0.3 Exemples de lois usuelles discrètes

0.3.1 Loi uniforme sur un ensemble fini de réels

Définition 20.

Soit X une variable aléatoire équiprobable sur Ω. On dit que X suit une loi uniforme sur $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$, notée $\mathcal{U}$, si

$$\begin{cases} X(\Omega) = E, \\ \forall\, k \in [1, n],\ P_X(x_k) = P(X = x_k) = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Exemple 0.3.1. *On lance deux dés (discernables équilibrés). Alors, $\Omega = [1, 6] \times [1, 6]$. On considère la variable aléatoire suivante*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow [1, 6] \\ (w_1, w_2) &\longmapsto w_1. \end{aligned}$$

On a : $X(\Omega) = [1, 6]$ et

$$\forall\, x \in [1, 6],\ P_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}.$$

Donc, X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$.

Proposition 10.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Si X suit la loi uniforme, $\mathcal{U}(n)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad Var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{U}(n)$. Alors, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi, un calcul directe donne $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

■

0.3.2 Loi de Bernoulli

Définition 21.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0,1]$), et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\}, \\ P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p. \end{cases} \tag{0.3.1}$$

Remarque 0.3.1.

1. *Les variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli servent à modéliser les situations à deux issues : succès (valeur* 1*, avec probabilité* p*) et échec (valeur* 0*, avec probabilité* $(1-p)$*).*
2. *La formule* (0.3.1) *définit bien une loi de probabilité. En effet,*

$$\sum_{k=0}^{1} P(X=k) = P(X=0) + P(X=1) = (1-p) + p = 1.$$

Exemple 0.3.2. *Une urne contient des boules blanches (avec proportion* p*) et des boules rouges (avec proportion* $(1-p)$*). On tire une boule de cette urne. Soit la variable aléatoire* X *suivante :*

$$\begin{aligned} X : \{Blanche, Rouge\} &\longrightarrow \{0,1\} \\ w &\longmapsto X(w) = \begin{cases} 1, & \textit{si boule=Blanche}\,; \\ 0, & \textit{si boule=Rouge}. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 11.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, $\mathcal{B}(p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad Var(X) = p(1-p).$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{1} kP(X=k) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p.$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 P(X=k) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p.$$

Ainsi, $Var(X) = p(1-p)$.

■

0.3.3 Lois Binomiales

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi du nombre de succès obtenus en une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve une probabilité de succès p.

Définition 22.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in N^*$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$, si

$$\begin{cases} X(\Omega) = [0,n], \\ \forall\, k \in [0,n],\ P_X(k) = P(X=k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}. \end{cases} \tag{0.3.2}$$

Remarque 0.3.2. *1. La loi de Bernoulli est la loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$.*

2. La formule (0.3.2) définit bien une loi de probabilité. En effet, $C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \geq 0$ et de plus, la formule de binome donne

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1.$$

Proposition 12.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad Var(X) = np(1-p).$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} np C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} np(k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np(n-1)p + np. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(X) &:= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= np(n-1)p + np - (np)^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

■

0.3.4 Lois de Poisson

Définition 23.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}, \\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ P_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \end{cases} \tag{0.3.3}$$

Remarque 0.3.3. *Le développement en série entière de la fonction exponentielle est le suivant*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La formule (0.3.3) *définit bien une loi de probabilité. En effet,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Proposition 13.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Si X suit la loi Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad Var(X) = \lambda.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors, on a :

$$E(X) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{-\lambda} = \lambda.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n + n(n-1)) \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Var(X) \;:=\; \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

■

0.3.5 Loi Géométrique

Définition 24.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la loi géometrique de paramètre p $\big(p \in]0,1[\big)$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\; P_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1}p. \end{cases} \tag{0.3.4}$$

Proposition 14.

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Si X suit la loi géometrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$