UNIVERSITÉ DE GABÈS FACULTÉ DES SCIENCES DE GABÈS	FSG كلية العلوم بقابس Faculté des Sciences de Gabès	A.U. : 2015-2016

Examen

Section: MRMa.2
Épreuve de : Introduction au calcul stochastique

Nature de l'épreuve : D.C.☐ E.F.☒	**Documents :**	**autorisés**	☐	**non autorisés**	☒
Date de l'épreuve : 06/01/2016	**Calculatrice :**	**autorisée**	☐	**non autorisée**	☒
Durée de l'épreuve : 03 Heure	**Session :**	**principale** ☒		**contrôle**	☐

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 : (07 pts) A- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant: $\forall k \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X \geq k] = p^{k-1};\ 0 < p < 1$$

et Y une variable aléatoire réelle telle que

$$\mathbb{E}[1_{\{Y>t\}}|X] = e^{-tX};\ t \in \mathbb{R}_+^\star.$$

1. Déterminer la loi de X
2. Montrer que la v.a. Y admet une densité que l'on déterminera.

B- Soit X une v.a. de loi normale centrée réduite, donner $\mathbb{E}[X^3|X^2]$.
C- On supposera que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Soit T un temps d'arrêt vérifiant: ils existent $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $n \geq 0$;

$$P(T \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \epsilon\, \mathbb{P} - p.s.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$; $P(T > kN) \leq (1-\epsilon)^k$.
   Ind. On pourra utiliser le fait que $P(T > kN) = P(T > kN; T > (k-1)N)$
2. En déduire que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Exercice 2 : (6 pts) A- Soientt $X = (X_n)_{n\geq 0}$ et $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ deux $\mathcal{F}_n$-martingales et τ un $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêt fini p.s. On définit le processus $U = (U_n)_{n\geq 0}$ par

$$U_n = X_n 1_{\{\tau \geq n\}} + Y_n 1_{\{\tau < n\}}.$$

1. Montrer que si $X_\tau = Y_\tau\ \mathbb{P} - p.s$ alors U est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

2. Montrer que si $\mathbb{P}(X_\tau = Y_\tau) < 1$ alors il existe $n \geq 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\{X_n \neq Y_n\} \cap \{\tau = n\}) > 0.$$

3. En déduire que si U est une martingale alors $X_\tau = Y_\tau$ $\mathbb{P}-$p.s.

B- Soit $X = (X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d de loi Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_1, ..., X_n)$ et $\nu = \inf\{n \geq 1; S_n = 1\}$. Peut on appliquer le théorème d'arrêt des martingales dans ce cas? Pourquoi?

Exercice 3 : (07 pts) Soit $X = (X_n)_{n\geq 1}$ une chaine de Markov sur un ensemble dénombrable E de loi initiale μ et de matrice de tansition T et $\mathcal{F}_n^0$ sa filtration naturelle. Posons pour $x \in E$, $\mathbb{P}^x[B] = \mathbb{P}[B|X_0 = x]$, pour tout évenement B.

1. Montrer que pour touts $A \in \mathcal{F}_n^0$; $m \geq 1$ et $x_1, ..., x_m \in E$, on a:

$$\mathbb{P}[A \cap \{X_{n+1} = x_1; ...;\ X_{n+m} = x_m\}|X_n = x] = \mathbb{P}[A|X_n = x]\mathbb{P}^x[X_1 = x_1; ...;\ X_m = x_m]$$

2. Soit τ un $\mathcal{F}_n^0$-temps d'arret; Montrer que pour touts $A \in \mathcal{F}_\tau$; $m \geq 1$ et $x_1, ..., x_m \in E$, on a:

$$\mathbb{P}[A \cap \{X_{\tau+1} = x_1; ...;\ X_{\tau+m} = x_m\}|D_x^\tau] = \mathbb{P}[A|D_x^\tau]\,\mathbb{P}^x[X_1 = x_1; ...;\ X_m = x_m],$$

avec $D_x^\tau = \{X_\tau = x\} \cap \{\tau < \infty\}$.

3. Soient $\tau_x^1 = \inf\{n \geq 1;\ X_n = x\}$ (on le notera τ_x pour simplifier); $N_x = \{\sum_{n\geq 1} 1_{\{X_n = x\}}\}$ et pour tout $k \geq 2$; $\tau_x^k = \inf\{n > \tau_x^{k-1};\ X_n = x\}$.

   a- Les v.a. τ_x^k; $k \geq 2$ sont elles des temps d'arret?

   b- Montrer que $\mathbb{P}^x[\tau_x^2 = \tau_x + n|\tau_x < \infty] = \mathbb{P}^x[\tau_x = n]$

   c- En déduire que $\mathbb{P}^x[\tau_x^2 < \infty] = \mathbb{P}^x[\tau_x < \infty]^2$

4. **a-** Montrer que pour $k \geq 2$; $\mathbb{P}^x[N_x \geq k] = \mathbb{P}^x[\tau_x < \infty]^k$

   b- En déduire que si $\tau_x < \infty$; $\mathbb{P}^x - p.s.$ alors $N_x = \infty$; $\mathbb{P}^x - p.s.$

Bon Travail